Logaritmos e eletrônica

Parte II

Na primeira parte do *post* **logaritmos e eletrônica** deixei por sua conta completar a escala logarítmica com os valores que estavam faltando, a saber, 3, 5, 6, 7 e 9 e sugeri que usasse a tabela III que aqui repito.

Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 6	Log 7	Log 8	Log 9
0,301	0,477	0,602	0,698	0,778	0.845	0,903	0,954

Na ocasião dei a dica lembrando que sendo Log 3 = 0,477 o 3 deveria ficar localizado um pouquinho antes da metade do caminho entre o 1 e o 1. Espero que você tenha feito e agora veremos algumas ideias “novas” para posicionar o 5, 6 e o 9.

Vou começar pela marcação do 6. Para posicioná-lo poderíamos usar a tabela que nos dá Log 6 = 0,778 ou usar outro caminho.

Lembremos que toda esta história de logaritmos começou com a tentativa de “transformar” multiplicações em somas e divisões em subtrações e então, podemos pensar que 6 = 2 x 3.

Usando este raciocínio podemos escrever **log 6 = log 2 + log 3**. Você concorda com isso?

Vamos conferir? Olha a tabela III aí em cima.

Log 6 = 0,301 + 0,477 = 0,778. Bingo!

Para que não paire nenhuma dúvida sobre este raciocínio relembre que escrever log 6 significa dizer que existe um número “x” tal que $10^x = 6$ (lembre- que já foi dito que se não for mencionada a base do logaritmo fica combinado que a base é 10). Pela tabela III x = 0,778 ou $10^{0,778} = 6$. Em outras palavras, **logaritmo de um número em uma determinada base nada mais é que um expoente ao qual devemos elevar esta base para obter o número**.

Esta é a definição que aparece na maioria dos livros de ensino médio, a diferença é que agora você sabe de que cartola este coelho saiu!

De certo modo, pode-se até dizer que “logaritmo é uma forma diferente de escrever expoentes”.

Permita-me dizer que ao escrever e verificar que a igualdade log 6 = log 2 + log 3 é verdadeira você acabou de ser apresentada aquilo que os livros de matemática chamam pomposamente de “propriedade dos logaritmos”

Oh! My God! Por que não ensinam deste jeito?

E eu tenho que dizer uma coisa a você: Briggs e Napier foram “os caras”, não é mesmo? Eles simplificaram tudo e ainda tem gente por aí que diz que logaritmo é um bicho de sete cabeças.

Antes prosseguir, agrademos gregos e troianos escrevendo formalmente uma das ditas propriedades dos logaritmos que nada mais que uma das propriedades da potenciação vista sob outro ponto de vista.

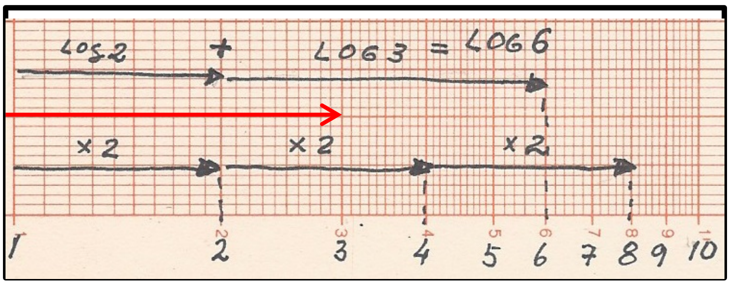
O logaritmo do produto de dois ou mais números é igual a soma dos logaritmos de cada um dos fatores que compõem o número.

Nos livros isso aparece assim

log m x n = log m + log n (em qualquer base)

Voltando a nossa escala logarítmica, e aplicando as observações acima concluímos facilmente que para posicionar o 6 basta “andar” um segmento igual ao log 2 MAIS um segmento igual ao log 3.

Acompanhe na figura.



Vamos ver como poderíamos fazer para marcar o 5. O bom da matemática é que sempre existe mais de uma maneira para chegar ao mesmo resultado.

Podemos pensar que 5 é igual a 10 dividido por 2 e então, usando a ideia de que o logaritmo "transforma" divisão em subtração podemos escrever log 5 = log (10 ÷ 2) = log 10 – log 2 o que pode ser "verificado" novamente usando a tabela III.

Como estamos trabalhando com base 10 o log 10 é igual 1.

Isto foi uma condição imposta na definição aritmética dos logaritmos apresentada na parte I a qual repito abaixo:

"É importante que a razão da PA seja 1 para que a base do logaritmo coincida com a razão da PG".

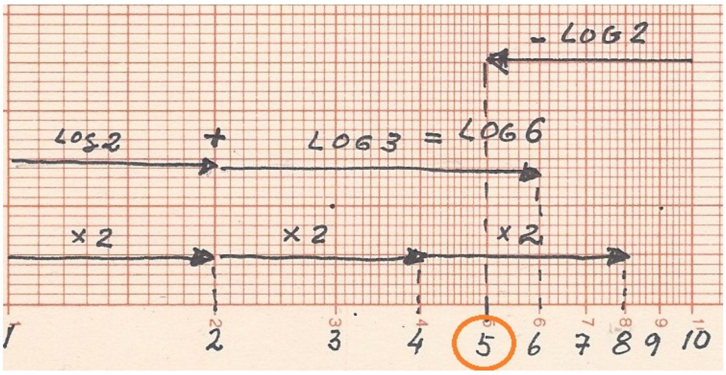
De um modo geral os livros também lhe dão mais uma decoreba dizendo **o logaritmo da base é igual a 1.**

Se você entendeu a proposta de criação dos logaritmos pela correspondência entre uma PA (de razão 1) e uma PG, a "propriedade" acima se torna óbvia, lembrando que a base do logaritmo é a razão da PG.

Voltando as nossas contas:

log 5 = log 10 – log 2 ou 1 - 0,301 = 0,698 (com um pequena aproximação)

Passemos agora ao gráfico. Neste caso como temos que subtrair, devemos "andar" para a esquerda. Acompanhe na figura.



Pra quem gosta de decoreba lá vem mais uma "propriedade" dos logaritmos.

> ***O logaritmo da divisão de dois números é igual ao logaritmo do dividendo (m) menos o logaritmo do divisor (n).***
>
> ***Nos livros isso aparece assim***
>
> ***log m ÷ n = log m - n log n (em qualquer base)***

Que tal a gente tentar posicionar o nove sabendo apenas que

log 3 = 0,477 (tabela III).

Aqui temos duas maneiras de pensar (lembre-se que em matemática sempre temos mais de um caminho).

Podemos fazer 9 = 3 x 3 ou 9 = 3^2.

Assim, log 9 = log (3 x 3) = log 3 + Log 3 ou 2 x log 3 = log 3^2.

Reparou que o expoente do três, neste caso igual a 2, passou a multiplicar o log 3.

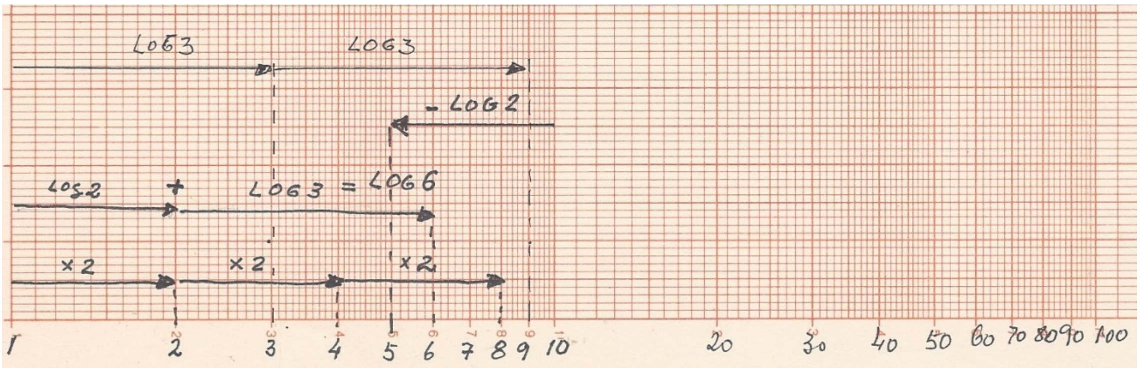
E sai do forno mais uma propriedade quentinha.

> ***O logaritmo de um número elevado a um expoente é igual ao valor do expoente multiplicado pelo logaritmo do número.***
>
> ***Nos livros isso aparece assim***
>
> ***log m^p= p x log m (em qualquer base)***

Vejamos se você entendeu mesmo. Quanto é log 81?

Como $81 = 3^4$ concluímos sem nenhum esforço que log 81 = 4 log 3 usando a "propriedade" acima.

Bem, já que eu falei em 81 que tal você pensar onde ele irá cair no gráfico abaixo (fica por sua conta fazer isso).



Uma aplicação da escala logarítmica na eletrônica (e em outras áreas também).

Quem se interessa por áudio sabe que uma das características importantes de um bom amplificador, entre outras, é a curva de resposta de frequência.

As frequências consideradas audíveis pelo ouvido humano vão dos 20Hz aos 20kHz (isto na melhor das hipóteses, há quem considere de 16Hz a 22kHz).

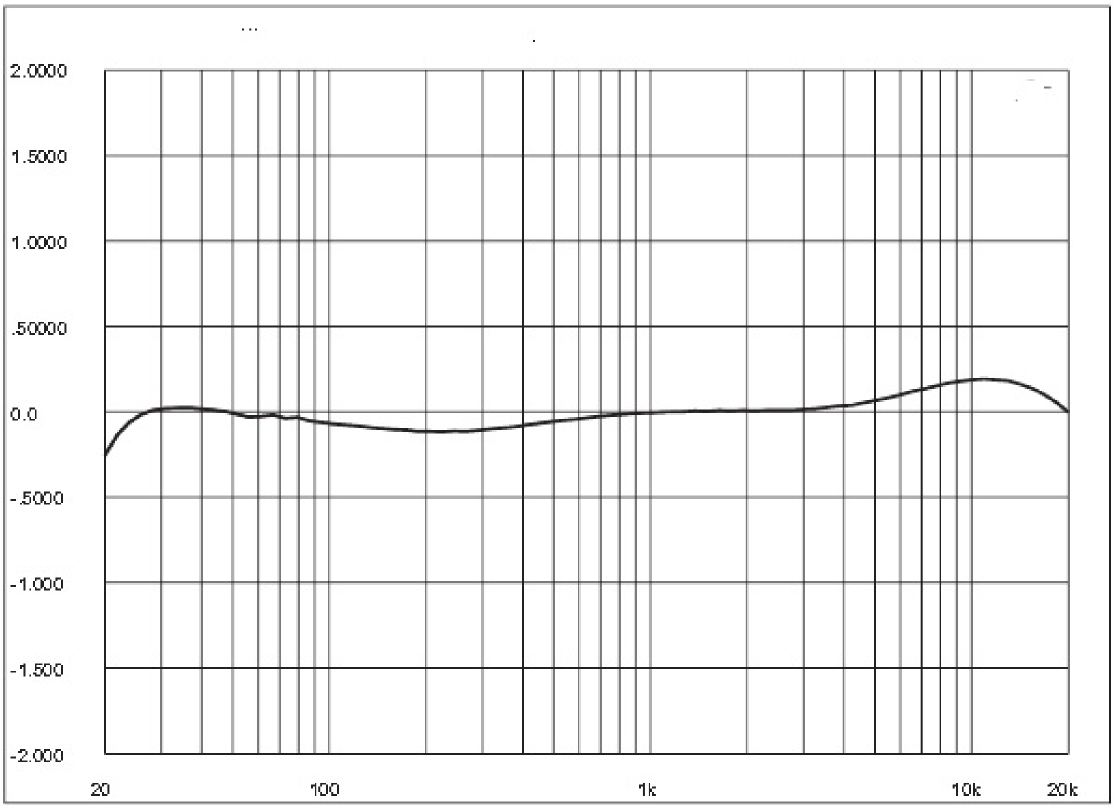
Assim sendo, um bom amplificador deve ter **resposta plana** dentro desta faixa de frequências, ou seja, sem alteração na potência.

A melhor forma de representar isto é através de um gráfico frequência versus potência.

Entretanto, para representar as frequências entre 20Hz e 20kHz em uma escala linear iríamos precisar de uma folha de papel enorme (ou quem sabe um rolo de papel higiênico), a menos que... tchan, tchan, tchan, representássemos as frequências numa escala logarítmica, não é mesmo?.

Uma curiosidade, na época de Briggs e Napier não existia amplificador!

Abaixo você vê um exemplo da curva de resposta de um amplificador de áudio onde o eixo horizontal onde marcamos as frequências está em escala logarítmica enquanto o eixo vertical onde marcamos a variação de amplitude (potência) está em escala linear. Chama-se a isto de *gráfico semi-log* onde um eixo é logarítmico e o outro é linear.



O que é decibel ou "no popular" o dB?

Após estes breve estudo sobre os logaritmos começarei a tratar do decibel como prometido *no* post anterior e seguindo o meu estilo farei novamente uma breve "caminhada histórica".

Sendo assim, entraremos no túnel do tempo de novo, só que desta vez não iremos ao século XVI como no *post* anterior, iremos até 1924 apenas.

Naquele ano os engenheiros da Bell Telephone Syste estavam querendo encontrar uma maneira de medir as perdas em uma linha telefônica e aí mediram a relação entre a potência aplicada (P_{in}) e a potência recebida (P_{out}) em dez milhas de um determinado cabo na frequência de 800Hz. Usaram esta frequência porque é onde se concentra a maior parte da energia da voz humana.

Nos experimentos, os engenheiros da Bell chegaram a seguinte relação:

$$\frac{Pout}{Pin} = 10$$

A partir daí eles concluíram que em 1 milha de cabo a atenuação seria dada por:

$$\frac{Pout}{Pin} = 10^{\frac{1}{10}}$$

Na época esta relação foi denominada UT (Unidade de Transmissão), mais tarde foi denominada **decibel** (décima parte do **bel**) em homenagem, obviamente, a Graham Bell, o inventor do telefone.

Assim, a definição primitiva de decibel, que se perdeu no tempo, diz que um decibel é atenuação sofrida por um sinal em uma milha de um determinado cabo de uma linha telefônica.

E o que tudo isto tem a ver com os logaritmos?

Tudo a ver. Experimentemos encontrar o logaritmo na base 10 de cada membro da igualdade acima. Podemos escrever:

$$\log(\frac{Pout}{Pin}) = \log(10^{\frac{1}{10}})$$

Algumas coisas que os alunos erram

Antes de prosseguir é preciso chamar a atenção para um erro muito comum dos alunos quando começam a estudar logaritmos e se deparam com uma expressão como esta.

É comum pensarem, **erradamente**, que "log" é alguma coisa que está multiplicando o que vem a seguir. Nada disso. Lembre-se que "log" **não é um fator que multiplica alguma coisa** e sim quer dizer que existe um expoente que elevando a base (no caso 10) irá reproduzir a quantidade que está depois da "sigla" log.

Por exemplo, ao se deparar com a igualdade:

$$\text{Log } (3\,x + 10) - \log x = \log 5$$

o aluno poderia pensar em "cortar os logs" de cada lado e concluiria apressadamente que $3x + 10 - x = 5$ ou que $x = -\,2{,}5$ quando o correto é $\log (3x + 10)/x = \log 5$ e portanto, $(3x + 10) / x = 5$ ou $x = 5$ e não, 2,5 como o apressadinho calculou.

Voltando ao decibel

Depois de "logaritimar" nossa relação de potências podemos reescrevê-la assim:

$$\log(\frac{Pout}{Pin}) = \left(\frac{1}{10}\right)\log 10$$

Como eu cheguei aqui? Usando a "propriedade" ***$\log m^p = p \times \log m$*** já vista anteriormente.

E agora lembrando que o logaritmo da base é igual a 1, por construção do conceito aritmético de logaritmos, podemos escrever

$$\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)x1$$

ou melhor ainda

$$10\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = 1$$

e finalmente diremos **que 10 vezes o logaritmo decimal da relação entre duas potências é igual a 1.**

Pera aí "1" o que? Não deveria entrar algum unidade neste resultado?

Se você pensou em usar watts, informo-lhe gentilmente que não pode, porque quando dividiu uma potência pela outro passou a ter um número sem unidades. Então, em homenagem ao cara do invento mais utilizado hoje em dia, usaremos **1 decibel**.

Uma importante observação sobre a unidade decibel

É importante que você perceba que o decibel não é uma unidade absoluta como o metro, o volt, ampère ou watt, só para citar alguns exemplos.

O **decibel é uma unidade de relação entre duas grandezas iguais**, neste caso, potências medidas em watts.

Portanto, não se pode expressar a potência de um amplificador, por exemplo, como 20 ou 30dB. Isto não faz nenhum sentido. O que se pode dizer é que a potência é +20db em relação a potência de entrada e neste caso a potência de saída será 100 vezes maior que a potência de entrada.

Reparou que foi colocado o sinal "+" antes do 20. E se colocássemos o sinal "-" o que este sinal faria mudar o resultado?

Vamos ver. Comecemos com o +20dB.

$$10\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = +20db$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 10 teremos

$$\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = 2$$

Por definição de logaritmo temos

$\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = 10^2 =$ 100 que é o mesmo que dizer que

$$P_{out} = 100\ P_{in}$$

E se fosse – 20dB?

$$10\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = -20db$$

$$\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = -2$$

$\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = 10^{-2}$ = $\frac{1}{100}$ ou Pout = $\frac{Pin}{100}$ o que significa que a potência de saída foi atenuada em cem vezes.

Na prática podemos dizer que o sinal positivo no valor em db significa um ganho e o sinal negativo é uma atenuação.

Mais uma vez isto reforça o caráter de unidade de relação do decibel e não de unidade absoluta.

Expandindo o conceito de decibel para tensões e correntes

Embora o conceito de decibel tenha sido desenvolvido para relacionar potências, nada impede que o usemos também para indicar a relação entre duas tensões ou duas correntes, ou seja, ganhos ou atenuações de tensão ou de corrente.

Lembremos das seguintes expressões da eletricidade

$$P = \frac{E^2}{R} \quad e \quad P = I^2 \times R$$

Voltemos a nossa definição de decibel com relação entre duas potências e expressemos as potências de entrada e saída em função das tensões de entrada e saída, entretanto tomando o cuidado de utilizar o mesmo valor para R nos dois casos.

$$10 \log\left(\frac{\frac{Eout^2}{R}}{\frac{Ein^2}{R}}\right) = 1$$

Como tomamos o cuidado de utilizar a resistência de entrada igual a de saída podemos eliminá-la na expressão acima sem prejuízo do cálculo e passamos a escrever:

$$10\log\left(\frac{Eout}{Ein}\right)^2 = 1$$

e finalmente aplicando uma das “propriedades” dos logaritmos teremos

$$20\log\left(\frac{Eout}{Ein}\right) = 1\text{db}$$

Tirando conclusões

Sempre digo que uma das melhores brincadeiras da infância é o jogo dos sete erros. Espero que você tenha tido infância e me responda de pressa qual a diferença entre expressar em decibel a relação entre duas potências ou entre duas tensões?

Você com sua percepção acurada deve ter notado que no caso da relação entre potências temos o fator 10 antes do logaritmo e quando temos relação entre tensões (sobre o mesmo valor de resistência) passamos a ter o fator 20.

E se em vez de relação entre tensões fosse relação entre correntes o que aconteceria?

Lembrando que $P = I^2 \times R$ chegamos a conclusão que o fator que multiplica o logaritmo da relação de correntes também será 20 e estamos conversados.

Nunca é de mais lembrar que nestes casos também vale a conclusão de que sinal positivo indica ganho e sinal negativo indica atenuação ou perda.

Usando decibéis e fazendo contas de cabeça

A primeira coisa que você precisa estar atento é se está trabalhando com relação de tensões ou de potências (relação entre correntes são pouco usadas, mas lembre-se que é igual a relação entre tensões).

Esta observação é importante como já vimos por causa do fator de multiplicação que no caso das potências é 10 e no caso das tensões (e correntes) é 20.

Vamos alguns exemplos práticos.

O que significa dizer aumentar 3db na potência?

Basta fazer

$$10\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = 3$$

$$\log\left(\frac{Pout}{Pin}\right) = 0{,}3$$

Aqui temos duas maneiras de resolver isto.

Uma delas é usando a nossa tabela onde vemos que log 2 = 0,3 e portanto, $\frac{Pout}{Pin}$ = 2 donde concluímos

$$P_{out} = 2P_{in}$$

O que significa dizer que a potência dobrou.

Por extensão se caísse 3db, então a potência teria caído pela metade.

A outra maneira é lembrar que $\frac{Pout}{Pin} = 10^{0,3}$

E como encontrar este valor?

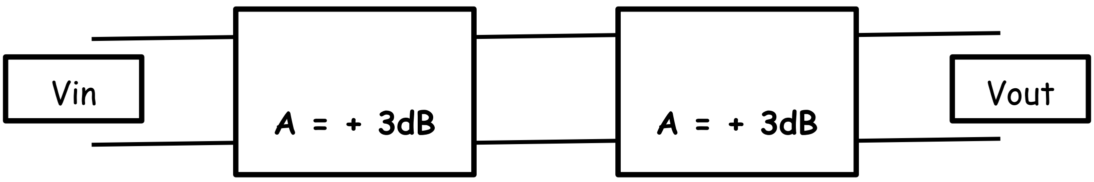
Você pode usar a calculadora científica (do Windows, por exemplo).

E se em vez de uma relação de potências tivéssemos uma relação tensões onde a tensão de saída fosse o dobro da tensão de entrada, ou seja, $P_{out} = 2\ P_{in}$ quantos db teríamos de aumento.

Usando a "fórmula" de db para tensões você encontrará 6dB.

Mas afinal onde está a vantagem de trabalhar com dB?

Imagine que temos dois amplificadores de tensão cada um com ganho de 3dB ligados em cascata como mostra a figura qual será o ganho total em db?



Como o ganho total de amplificadores em cascata é calculado pelo produto dos ganhos individuais se trabalharmos como dB podemos somar os ganhos individuais para encontrar o ganho total, uma vez o dB é na verdade calculado como logaritmo de uma relação e assim, podemos a usar a propriedade dos logaritmos que "transforma" produtos em somas e, neste caso, obteremos o ganho total igual a 6dB.

Na prática não precisamos ficar fazendo estas contas toda hora, podemos usar tabelas que já nos dão o resultado como a mostrada abaixo.

dB	Ganho de Tensão	Ganho de Potência
0	1	1
1		
2		
3	1,4	2
5		
6	2	4
10		
20	10	100
30	31,6	1000

Deixei alguns valores em branco propositalmente para você praticar. Se quiser, coloque a resposta nos comentários.

Este foi apenas um aperitivo sobre decibéis, pois minha intenção principal era tratar dos logaritmos e de uma aplicação em eletrônica.

No futuro vou escrever mais sobre decibéis e sobre logaritmos.

Referência bibliográfica

Sorin, Saul

Teoria Y Practica del DECIBEL

Editorial Hispano Americano AS – Buenos Aires, 1958